

STATISTIQUES & PROBABILITÉS

MATHÉMATIQUES

COLLÈGE
LYCÉE

De la sixième à la terminale

Christophe Roland

Enseignant au lycée Paul Duez de Cambrai

Anne Keller

Enseignante au collège Louise Michel de Lille

Xavier Brioit

Enseignant au lycée Marguerite de Flandre de Gondcourt

Laurent Charlemagne

Enseignant au lycée Marguerite Yourcenar de Beuvry

Charles Suquet

Professeur des universités, UFR de mathématiques, Lille 1

Michael Kaim

Enseignant au lycée International Montebello de Lille

Luc Picot

Enseignant au lycée International Montebello de Lille

Coordonné par Christophe Roland

Enseignant au lycée Paul Duez de Cambrai

Sous la direction de François Capy et Michel Gouy

IA-IPR de mathématiques

Sommaire

- 7 Préface
- 9 Introduction

PARTIE 1

13 STATISTIQUE DESCRIPTIVE

17 LA NOTION DE FRÉQUENCE AU COLLÈGE

- 19 Comprendre et utiliser les différentes écritures d'une fréquence
 - 21 Déterminer une proportion en appliquant successivement deux taux de pourcentage
 - 23 Déterminer une fréquence lors de la réunion de deux groupes
 - 24 Comprendre et utiliser un pourcentage d'évolution
 - 30 Comprendre l'importance des effectifs
 - 34 D'autres ressources
-

37 LA NOTION DE MOYENNE AU COLLÈGE

- 39 Calculer une moyenne pour de petits effectifs
 - 41 Calculer une pente moyenne
 - 45 Utiliser le tableur pour calculer une moyenne
 - 50 D'autres ressources
-

53 LES NOTIONS DE MÉDIANE, QUARTILES ET ÉTENDUE AU COLLÈGE

- 55 Introduire de nouvelles caractéristiques pour exploiter une série statistique
 - 60 Travailler mentalement les notions de médiane et d'étendue
 - 62 Interpréter des caractéristiques d'une série statistique
 - 63 Utiliser le tableur pour exploiter une série statistique
-

67 ANALYSE DE DONNÉES EN CLASSE DE SECONDE

- 69 Construire des séries statistiques sous contraintes
- 71 Critiquer et proposer une représentation
- 72 Un exemple de travail interdisciplinaire
- 77 Déterminer les paramètres statistiques d'une série discrète ou continue

83 **ANALYSE DE DONNÉES EN CLASSE DE PREMIÈRE**

84 Introduire l'écart-type

87 Calculer un écart-type avec de petits effectifs

89 Comparer des séries

91 D'autres ressources

93 **DU CÔTÉ DE LA THÉORIE**

Mesure ponctuelle associée à une série statistique*

Intégration par rapport à une mesure ponctuelle*

Fonction de répartition et médiane(s)*

Fonction de répartition et moyenne*

Résumés d'une série statistique et minimisation*

PARTIE 2

97 **PROBABILITÉS**

99 **LA NOTION DE PROBABILITÉ**

101 Comprendre des notions élémentaires de probabilité

110 Utiliser des notions élémentaires de probabilité [1]

112 Utiliser des notions élémentaires de probabilité [2]

115 Utiliser les probabilités pour élaborer une stratégie

118 Étudier et modéliser une expérience aléatoire

121 Interpréter des événements de manière ensembliste

127 Proposer et valider un modèle probabiliste

133 **LA NOTION DE LOI DE PROBABILITÉ
D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE**

135 Prendre une décision à partir de l'espérance

138 Choisir sa stratégie à partir d'une espérance

141 Justifier ses choix à l'aide d'outils probabilistes

146 Découvrir la loi binomiale

152 Consolider les connaissances sur la loi binomiale

156 Compléter et exploiter un arbre pondéré

160 Découvrir d'autres lois discrètes

165 **LA NOTION DE LOI DE PROBABILITÉ À DENSITÉ**

167 Introduire la loi uniforme et découvrir d'autres lois continues
(triangulaire, de Bates...)

174 Découvrir le théorème de la limite centrée. Introduire la loi normale

179	Centrer et réduire
183	Consolider les connaissances sur la loi normale
185	Exploiter les lois exponentielles
193	Découvrir une autre loi continue : la loi bêta

195	DU CÔTÉ DE LA THÉORIE
	Espaces probabilisés*
	Probabilités conditionnelles*
	Indépendance*
	Variables aléatoires réelles*
	Lois classiques*
	Espérance*
	Loi des grands nombres*
	TLC (convergence vers une loi normale)*

PARTIE 3

199 **STATISTIQUE INFÉRENTIELLE****

201	LA NOTION DE FLUCTUATION
203	Découvrir un intervalle de fluctuation et les notions afférentes
208	Faire une analyse critique d'un résultat d'échantillonnage
213	Comprendre l'importance de la population de référence
216	Prendre une décision à partir d'un échantillon

221	DU CÔTÉ DE LA THÉORIE
	Intervalle de fluctuation*
	Intervalle de confiance*
	Épilogue*

* Ces chapitres sont consultables en ligne : <https://www.reseau-canope.fr/notice/statistiques-et-probabilites-de-la-6e-a-la-terminale.html>.

** Ce chapitre est le complément de l'article conséquent « Les intervalles de fluctuation de la seconde à la terminale » contenu dans l'ouvrage *Mathématiques : compétences et évolution des pratiques, classe de terminale*. Cet article est consultable en ligne : <https://www.reseau-canope.fr/notice/statistiques-et-probabilites-de-la-6e-a-la-terminale.html>.



Préface

Le monde contemporain se caractérise par une profusion d'informations, parmi lesquelles les données chiffrées occupent une place importante. Pour exercer son libre arbitre, le citoyen doit être en mesure de se repérer parmi elles afin de les interpréter avec discernement.

Statistiques et probabilités de la sixième à la terminale s'inscrit pleinement dans cette perspective. Proposant une grande diversité de situations, il prend appui sur des questions de la vie courante ou sur des documents issus des médias.

Ainsi conçu, l'enseignement des statistiques et des probabilités est propice à un renouvellement des pratiques pédagogiques, en offrant un terrain privilégié pour placer les élèves en situation d'activité.

Les différentes étapes du travail (synthèse, représentation, caractérisation d'un échantillon, simulation, calculs, etc.) visent à préparer l'interprétation des données. La démarche de l'élève consiste à faire émerger des questions et à résumer des informations, pour comprendre et analyser une situation en vue d'émettre un avis ou de préparer une décision.

Dans cet esprit, l'usage d'un tableur ou d'autres logiciels facilite l'exploitation de données réelles, qui peuvent être issues d'autres disciplines.

Cet ouvrage présente le double mérite de couvrir l'ensemble des classes du collège au lycée et d'articuler l'approche des statistiques avec celle des probabilités.

Les problèmes proposés, issus de situations concrètes, donnent lieu à des tâches non guidées propices à la prise d'initiative. À ce titre, ils correspondent parfaitement aux enjeux des programmes. Débouchant sur des questions ouvertes, ils fournissent l'occasion d'instaurer dans la classe un débat au cours duquel les élèves doivent faire valoir leurs arguments.

Réjouissons nous de cette initiative de l'académie de Lille. Que soient félicités les auteurs pour la qualité de ce travail, qui contribuera à enrichir la réflexion des équipes de professeurs et à développer le goût des élèves pour les mathématiques à travers la résolution de problèmes stimulants !

Xavier Sorbe
Inspecteur général de l'Éducation nationale.

Comprendre et utiliser les différentes écritures d'une fréquence

L'AVARE

Niveau: cinquième

Prérequis:

- différentes écritures d'un nombre;
- passage d'une écriture à une autre;
- écritures fractionnaires.

Objectifs:

- motiver et travailler le passage d'une écriture à une autre;
- introduire (ou réinvestir) la comparaison de deux proportions (ici exprimées sous la forme de fractions de numérateur égal à 1);
- mettre en œuvre un travail interdisciplinaire.

Compétences mises en œuvre¹:

- maîtrise de la langue;
- argumentation à l'oral.

L'expression « pour cent » s'est imposée au siècle des Lumières, comme l'atteste l'*Encyclopédie de Diderot et d'Alembert*. Auparavant, une fréquence ou un taux s'énonçait en recherchant le dénominateur d'une fraction équivalente dont le numérateur est égal à 1.

Dans l'extrait suivant de *L'Avare* (acte II, scène I), la Flèche, valet de Cléante, parle d'un prêt « au denier dix-huit ». Pour actualiser les propos du personnage, il est nécessaire de comprendre l'expression et de la reformuler en passant d'une écriture fractionnaire à une écriture en pourcentage.

DÉROULEMENT

Cette activité est introduite en classe entière, pour s'assurer de la compréhension par tous de la situation et du rôle de chaque personnage. Il ne s'agit pas, à cette étape, d'expliquer tout le vocabulaire, certes déroutant pour certains élèves, mais de permettre à chacun de s'investir dans le travail de groupe qui va suivre. Le professeur peut notamment inviter les élèves à reformuler les questions, à traduire les expressions spécifiques à l'activité avec leurs propres mots (« prêteur », « taux d'intérêt », « taux d'usure »). Les questions sont formulées pour susciter des échanges entre les élèves et laisser place à leurs initiatives dans la phase de réécriture.

¹ Outre l'acquisition de connaissances et de capacités, les programmes visent à développer des compétences spécifiques à notre matière et transversales, et ce, pour favoriser la formation tout au long de la vie et pour mieux appréhender notre société en constante évolution. Pour le collège, on consultera le socle commun des connaissances et des compétences. Pour le lycée, on consultera le texte de référence *Les compétences mathématiques au lycée* produit par le groupe des mathématiques de l'IGEN (<http://mathematiques.discipline.ac-lille.fr/lycee/documents-lycee/programmes-lycee/competences-lycee.pdf>).

ACTIVITÉ

Harpagon, l'avare, n'aime que son argent. Il ne voit que des voleurs autour de lui, il soupçonne tout le monde de vouloir lui voler son argent. Il prive ses enfants du nécessaire. Son fils, Cléante, qui ne peut compter sur son père, a besoin de 15 000 francs. Son valet, la Flèche, se charge de lui trouver un prêteur.

LA FLÈCHE. — Le prêteur, pour ne charger sa conscience d'aucun scrupule, prétend ne donner son argent qu'au denier dix-huit.

CLÉANTE. — Au denier dix-huit ? Parbleu, voilà qui est honnête ! Il n'y a pas lieu de se plaindre.

Extrait de *L'Avare*, Molière, acte II, scène I.

1. À l'époque de Molière, on utilisait l'expression « au denier... » pour fixer un taux d'intérêt. Par exemple, un prêt « au denier dix » signifiait que pour dix deniers empruntés, il fallait verser un denier d'intérêt. Proposer différentes écritures d'un taux « au denier dix ».

2. À l'époque de Molière, le taux légal ou « taux du roi » était fixé au denier vingt. Le taux réclamé par le prêteur est-il légal ou est-il au contraire un taux « d'usure », taux d'intérêt supérieur au taux légal ?

3. Pour espérer se faire comprendre de nos jours, la Flèche ne devrait plus parler d'un prêt « au denier dix-huit ». Proposer une réécriture plus actuelle de cet échange entre Cléante et son valet.

PROLONGEMENT

Par la suite, la Flèche apprend à Cléante que le prêteur (qui n'est autre qu'Harpagon lui-même) ne dispose pas des 15 000 francs en liquide et informe son maître des conditions réelles du prêt.

LA FLÈCHE. — Cela est vrai. « Mais, comme ledit prêteur n'a pas chez lui la somme dont il est question, et que pour faire plaisir à l'emprunteur il est contraint lui-même de l'emprunter d'un autre sur le pied du denier cinq, il conviendra que ledit premier emprunteur paye cet intérêt sans préjudice du reste, attendu que ce n'est que pour l'obliger que ledit prêteur s'engage à cet emprunt. »

CLÉANTE. — Comment diable ! [...] C'est plus qu'au denier quatre. [...] Il y a encore quelque chose ?

LA FLÈCHE. — Ce n'est plus qu'un petit article. « Des quinze mille francs qu'on demande, le prêteur ne pourra compter en argent que douze mille livres, et, pour les mille écus restants, il faudra que l'emprunteur prenne les hardes, nippes et bijoux dont s'ensuit le mémoire, et que ledit prêteur a mis de bonne foi au plus modique prix qu'il lui a été possible. »

CLÉANTE. — Que veut dire cela ?

LA FLÈCHE. — Écoutez le mémoire. « Premièrement, un lit de quatre pieds, à bandes de point de Hongrie, appliquées fort proprement sur un drap de couleur d'olive, avec six chaises, et la courtepointe de même, le tout bien conditionné et doublé d'un petit taffetas changeant rouge et bleu. Plus un pavillon à queue, d'une bonne serge d'Aumale rose sèche, avec le mollet et les franges de soie. »

CLÉANTE. — Que veut-il que je fasse de cela ?

La Flèche. — Attendez. « Plus une tenture de tapisserie des amours de Gombaut et de Macée. Plus une grande table de bois de noyer, à douze colonnes ou piliers tournés, qui se tire par les deux bouts, et garnie par le dessous de ses six escabelles. »

CLÉANTE. — Qu'ai-je affaire, morbleu ?

LA FLÈCHE. — Donnez-vous patience. « Plus trois gros mousquets tout garnis de nacre de perle, avec les trois fourchettes assortissantes. Plus un fourneau de brique, avec deux cornues et trois récipients, fort utiles à ceux qui sont curieux de distiller. »

CLÉANTE. — J'enrage !

LA FLÈCHE. — Doucement. « Plus un luth de Bologne garni de toutes ses cordes, ou peu s'en faut. Plus un trou-madame et un damier, avec un jeu de l'oie renouvelé des Grecs, fort propres à passer le temps lorsque l'on n'a que faire. Plus une peau d'un lézard de trois pieds et demi remplie de foin, curiosité agréable pour pendre au plancher d'une chambre. Le tout, ci-dessus mentionné, valant loyalement plus de quatre mille cinq cents livres, et rabaisé à la valeur de mille écus par la discrétion du prêteur. »

CLÉANTE. — Que la peste l'étouffe avec sa discrétion, le traître, le bourreau qu'il est ! A-t-on jamais parlé d'une usure semblable ? Et n'est-il pas content du furieux intérêt qu'il exige, sans vouloir encore m'obliger à prendre pour trois mille livres les vieux rogatons qu'il ramasse ? Je n'aurai pas deux cents écus de tout cela ; et cependant il faut bien me résoudre à consentir à ce qu'il veut, car il est en état de me faire tout accepter, et il me tient, le scélérat, le poignard sur la gorge.

1. À la lecture de ce dialogue, déterminer la valeur d'un écu.
2. Quel est le taux d'intérêt réclamé par Harpagon à son fils ? Présenter la démarche et expliquer les calculs effectués.

COMMENTAIRES DE SÉANCE

Pour illustrer cet extrait plus long de la scène I et en faciliter la compréhension, il peut être intéressant de visionner avec les élèves un extrait d'une version filmée de la pièce (par exemple le film de Jean Girault et Louis de Funès, sorti en 1980). Dans les adaptations modernes, l'aspect *mathématique* est souvent absent de ce dialogue, au profit d'une mise en valeur de l'avarice du prêteur.

Une étude plus approfondie de la pièce ou de scènes choisies peut se mener en collaboration avec le professeur de lettres de la classe.

Déterminer une proportion en appliquant successivement deux taux de pourcentage

PAYS D'ÉVIAN MOBILE

Niveau: cinquième

Prérequis :

- notion de pourcentage ;
- application d'un taux de pourcentage.

Objectifs :

- travailler la notion de proportion ;
- illustrer l'application successive de deux taux de pourcentage.

Compétences mises en œuvre :

- maîtrise de la langue ;
- recherche de l'information utile.

DÉROULEMENT

Courte et facile d'accès, cette activité peut être menée en classe, de manière collective, ou proposée individuellement aux élèves lors d'un travail à la maison par exemple. La recherche des informations utiles pour répondre aux questions est l'occasion de revenir sur quelques expressions importantes dans l'énoncé, comme « parmi », « estiment », « autres ». Pour aider les élèves les plus fragiles à extraire l'information et à l'exploiter correctement, le professeur peut les inviter à reformuler certaines phrases, s'assurant ainsi d'une bonne compréhension, par tous, des données de l'énoncé.

Un exemple de travail réalisé par des élèves est disponible sur le site compagnon. Ayant d'abord essayé de travailler avec les effectifs, ils se sont rapidement aperçus que cela faisait intervenir de grands nombres et qu'en toute rigueur, ils devaient s'assurer que le nombre total de votes correspondait à celui des exprimés du premier tableau. Ils se sont alors mis d'accord pour faire varier non pas les effectifs des électeurs de chaque parti, mais leur proportion parmi l'électorat français. Les élèves ne se sont pas souciés du caractère réaliste de la répartition qu'ils ont élaborée. La majorité d'entre eux s'est arrêtée dès qu'elle a trouvé une proposition amenant à une victoire du « oui », les plus courageux ont essayé de s'approcher le plus possible du résultat réel en faisant varier leur répartition par parti.

Document en ligne : Referendum.ods.

POTUS

Niveau : troisième

L'élection du président des États-Unis relève d'un processus bien huilé, réglé au jour près et qui se renouvelle tous les quatre ans. Même si plusieurs partis se présentent, seuls deux d'entre eux dominent : le parti républicain et le parti démocrate.

Avant de prêter serment et de prendre ses fonctions, le nouveau POTUS (President Of The United States) prend part à un véritable *marathon* politique qui dure presque un an !

À l'aide des documents suivants, rédiger un article présentant le caractère exceptionnel de l'élection présidentielle américaine de novembre 2000.

DOCUMENT 1 ELECTION DAY

À la différence de ce qui se passe en France, l'élection présidentielle américaine est un scrutin indirect. L'Election Day, le mardi qui suit le premier lundi de novembre, les électeurs américains sont invités à voter pour élire leur président, mais ils ne désignent pas directement celui-ci. Les citoyens se rendent aux urnes dans chacun des 50 États pour élire les « grands électeurs » qui éliront à leur tour le président. En tout, 538 grands électeurs sont élus. Les grands électeurs se réunissent ensuite pour élire officiellement le président et le vice-président. Pour être élu président de la République aux États-Unis, il faut recueillir au moins 270 voix, soit la majorité absolue des 538 voix des grands électeurs.

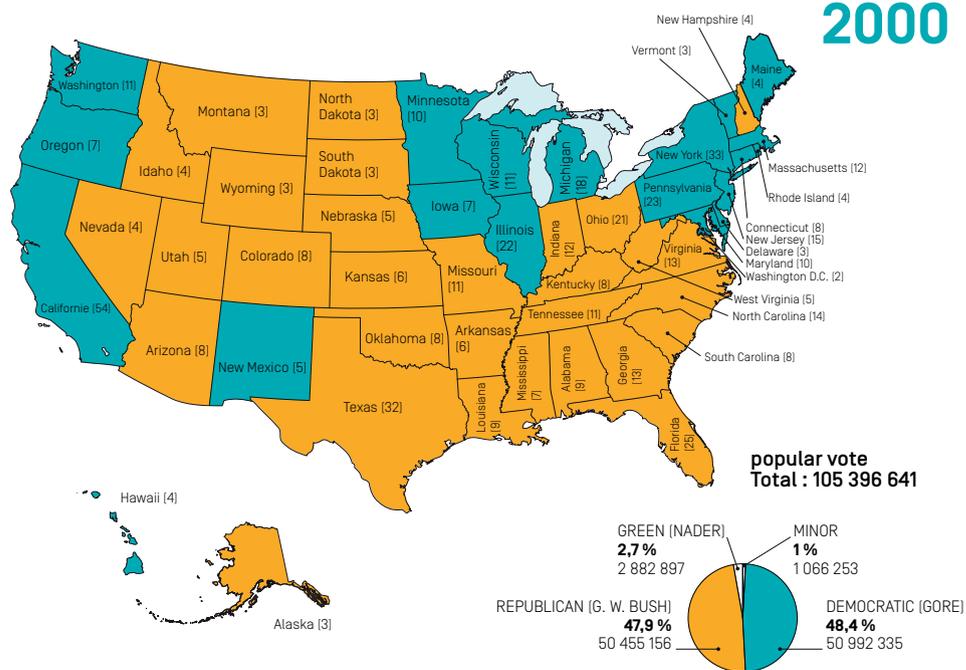
DOCUMENT 2 LA RÉGLE DU « WINNER TAKES ALL »

Mis à part deux États (le Maine et le Nebraska) où le vote se déroule à la proportionnelle, les autres États ont choisi un mode de scrutin particulier. Il est décidé que le candidat recevant la majorité des voix, obtient tous les votes des grands électeurs de l'État.

DOCUMENT 3 RÉSULTATS OFFICIELS DE L'ÉLECTION PRÉSIDENTIELLE AMÉRICAINE DU MARDI 7 NOVEMBRE 2000

AL GORE	Parti démocrate	50 992 335 voix	48,4 %
GEORGE W. BUSH	Parti républicain	50 455 156 voix	47,9 %
RALPH NADER	Parti écologiste	2 882 897 voix	2,7 %
AUTRES CANDIDATS		1 066 253 voix	1 %

DOCUMENT 4
CARTE DES GRANDS ÉLECTEURS



D'après Wikipédia (National Atlas of the United States), Carte des grands électeurs.
© Réseau Canopé.

D'autres ressources

Voici quelques suggestions de ressources à exploiter avec les élèves. L'étude de ces ressources peut être l'occasion de faire rédiger de courts articles de presse par les élèves sur des sujets d'actualité autour du développement durable (le bio, la qualité de l'air). Les arguments avancés dans ces articles devront s'appuyer sur l'exploitation des données prélevées dans ces documents et pourront intégrer une présentation graphique pertinente (choisie et construite par les élèves) des résultats.

LE BIO EN FRANCE

Niveaux : cinquième, quatrième, troisième

On peut explorer le site de l'Agence française pour le développement et la promotion de l'agriculture biologique (Agence BIO)⁷ et plus précisément la très riche brochure *L'agriculture biologique : ses acteurs, ses produits, ses territoires*⁸.

⁷ [En ligne] www.agencebio.org, rubriques CHIFFRES CLÉS & analyses > La bio en France.

⁸ [En ligne] www.agencebio.org/sites/default/files/upload/documents/4_Chiffres/BrochureCC/CC2013.pdf.

Calculer une moyenne pour de petits effectifs

Prérequis :

- un peu de calcul mental...

Objectifs :

- poursuivre la pratique régulière du calcul mental ;
- mettre en œuvre l'importance des effectifs dans le calcul d'une moyenne pondérée.

Compétences mises en œuvre :

- prise d'initiative ;
- esprit critique ;
- questionnement ;
- argumentation à l'oral.

DÉROULEMENT

En début ou en fin d'heure, indépendamment des notions mathématiques travaillées à ce moment de la progression annuelle, on propose aux élèves les courts problèmes suivants.

MA MOYENNE ANNUELLE

Niveau: quatrième

Avant le conseil de classe du troisième trimestre, Oriane se lamente : « Au premier trimestre, ma moyenne de mathématiques était de 8 sur 20. Je me suis ressaisie au deuxième trimestre, ma moyenne était de 14 sur 20. Dur, dur au troisième trimestre, plus que 7 sur 20. Je suis tellement déçue, ma moyenne annuelle est inférieure à 10 sur 20 ! »

Quelle n'est pas sa surprise quand elle découvre sur l'ENT du collège que sa moyenne annuelle en mathématiques est supérieure à 10 sur 20 ! Le professeur de mathématiques se serait-il trompé ?

Que peut-on en penser ?

MOYENNE DE CLASSE

Niveau: quatrième

En consultant l'espace consacré aux résultats des classes de quatrième sur le site du collège, Amine est très surpris :

- la moyenne de sa classe, la 4^e A, au premier devoir surveillé, est de 9 sur 20 ;
- la moyenne de la 4^e B est de 10 sur 20 ;
- la moyenne des deux classes est de 11 sur 20.

Que peut-on en penser ?

Étudier et modéliser une expérience aléatoire

LE JEU DES COCHONS

Niveau: à partir de la troisième

Prérequis:

- fréquences;
- arbre de probabilité (troisième partie).

Objectifs:

- répéter un grand nombre de fois une expérience aléatoire;
- expérimenter et conjecturer (première partie);
- proposer un modèle probabiliste à partir de l'observation de fréquences (deuxième partie);
- calculer des probabilités à l'aide d'un arbre (troisième partie).

Compétences mises en œuvre:

- esprit critique;
- démarche scientifique;
- argumentation à l'oral et/ou à l'écrit.

Le *Jeu des cochons*, commercialisé en 1977 par l'anglais David Moffat sous le titre *Pass the pigs*, est un jeu de hasard populaire dans les pubs britanniques ! Les règles en sont très simples : après avoir lancé deux petits cochons en caoutchouc, le joueur observe la position dans laquelle ces derniers sont retombés. Les diverses positions obtenues rapportent chacune un certain nombre de points.

Cette activité se présente en trois parties. La première et la deuxième reposent sur la répétition d'une expérience aléatoire dont les issues ne sont pas équiprobables, dans le but d'en proposer un modèle probabiliste. La troisième partie propose d'effectuer des calculs de probabilités à partir du modèle dégagé précédemment.

DÉROULEMENT

Pour la première partie de l'activité, les élèves, par groupe de quatre, ont à leur disposition deux cochons en caoutchouc, ils prennent connaissance des règles du jeu et notamment de la distribution des points suivant la position des cochons. Une première conjecture peut être émise quant à la pertinence de cette distribution. Après quelques lancers, les élèves sont amenés à préciser leurs réponses.

La deuxième partie permet d'affiner les conjectures émises précédemment grâce à un nombre de lancers plus important. Les élèves observent une stabilisation des fréquences et proposent un modèle probabiliste du jeu.

Dans la dernière partie, le modèle probabiliste est exploité pour calculer la probabilité que certains événements se réalisent.

ACTIVITÉ

« Des issues non équiprobables »

Quand on lance un cochon, il peut s'arrêter dans une des six positions suivantes.

1



2



3



4



1: Sur le flanc gauche / Sur le flanc droit (Flancs)

2: Sur le groin (Groin-Groin)

3: Sur les pattes (Trotteur)

4: Sur le dos (Tournedos)

5: Sur l'oreille (Bajoue)

5

On attribue un nombre de points à chaque position du cochon :

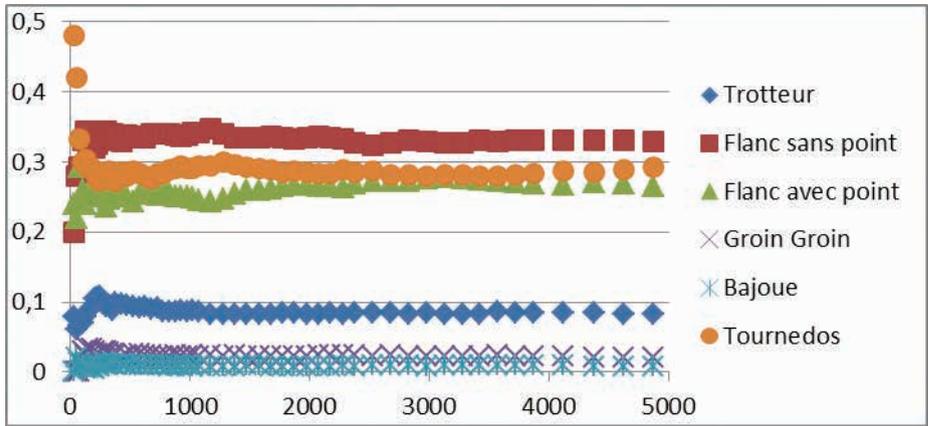
- un Tournedos et un Trotteur rapportent chacun cinq points (vingt en cas de double Tournedos ou double Trotteur);
- un Groin-Groin rapporte dix points (quarante pour un double);
- un Bajoue rapporte quinze points (soixante pour un double);
- les Flancs rapportent un point s'ils sont identiques et zéro sinon.

Pourquoi le nombre de points attribués à chaque position n'est-il pas le même ?

La distribution des points semble-t-elle pertinente ?

« Stabilisation des fréquences »

Le graphique suivant représente les fréquences d'apparition de chaque position en fonction du nombre de lancers effectués (5 000 lancers d'un cochon).



La distribution des points semble-t-elle pertinente? Expliquer.

« **Calculs de probabilités** »

Le tableau suivant indique les fréquences d'apparition des positions pour les 5000 lancers.

TROTTEUR	FLANC sans point	FLANC avec point	GROIN-GROIN	BAJOUE	TOURNEDOS
0,084	0,329	0,266	0,02	0,008	0,293

En assimilant les fréquences observées aux probabilités, déterminer la probabilité d'obtenir (en lançant deux cochons):

- un double Trotteur;
- zéro point;
- cinq points;
- au moins cinq points.

COMMENTAIRES

Dès la découverte des cochons, les élèves répondent à la première question en conjecturant que certaines positions pourraient être difficiles à obtenir et donc plus rares, rapportant par conséquent plus de points. Par ordre décroissant de points, on obtiendrait Groin-Groin et Bajoue, Trotteur et Tournedos, et enfin Flancs identiques et Flancs différents. Mais il faut expérimenter pour analyser plus précisément la distribution des points (pourquoi attribuer quatre fois plus de points pour un double?).

Les groupes effectuent ensuite des lancers de cochons pendant une quinzaine de minutes et notent les positions obtenues. Selon les groupes, le nombre de lancers est plus ou moins important: certains s'organisent efficacement, d'autres moins (écriture en toutes lettres des positions à chaque lancer, lancer des deux cochons par un même élève, les autres restant spectateurs...).

Le professeur met fin à la phase d'expérience et relève tous les résultats obtenus (un millier environ) en les saisissant dans un tableur pour illustrer le tout à l'aide d'une représentation graphique des fréquences observées.

À partir de ce résumé, le professeur lance le débat: « Tournedos et Trotteur n'ont pas la même fréquence d'apparition », « les deux Flancs ne semblent pas équiprobables », « le Groin-Groin est très rare »... La faible fréquence d'apparition de la position Trotteur étonne tous les groupes! La conjecture est corrigée à partir de ces premières expérimentations. On aboutit à un nouveau classement par ordre décroissant: Bajoue et Groin-Groin, Trotteur, et enfin Flancs et Tournedos. La dotation des points ne semble donc pas pertinente!

Il apparaît naturel aux élèves qu'un plus grand nombre de lancers permettrait d'affiner la conjecture (« classement »).

Dans la deuxième partie, les élèves constatent que les fréquences se stabilisent quand le nombre de lancers augmente (illustration de la loi des grands nombres). Les réactions sont intéressantes : « les fréquences se rapprochent des probabilités », « la fréquence d'une position sur 5 000 lancers, c'est la chance de l'avoir vraiment... ». La modélisation de l'expérience à partir de l'observation des fréquences se fait alors tout à fait naturellement.

Grâce au tableau des fréquences de la dernière partie, les élèves valident et affinent leurs conjectures : ils sont maintenant en capacité de fournir une réponse argumentée à la problématique initiale (distribution des points).

PROLONGEMENTS

On peut proposer des prolongements à foison qui couvrent un large champ du programme sur les probabilités (tous niveaux, toutes séries). En voici deux exemples.

En première, on peut introduire la variable aléatoire X qui, à un lancer de deux cochons, associe le score obtenu. On peut alors étudier cette variable aléatoire en demandant aux élèves de donner sa loi de probabilité, son espérance et d'interpréter ces résultats.

En seconde et en première, on peut considérer plusieurs répétitions identiques et indépendantes d'une même expérience aléatoire. On lance deux cochons et tant que l'on n'a pas obtenu zéro (deux flancs différents), on additionne les points obtenus. Le premier joueur qui obtient ou dépasse 100 points l'emporte. On peut s'interroger sur la probabilité de gagner en trois coups.

Interpréter des événements de manière ensembliste

LES COLONS DE CATANE

Niveau : seconde (possible en troisième)

Prérequis :

- notion de hasard ;
- notion de probabilité.

Objectifs :

- interpréter des événements de manière ensembliste ;
- remobiliser et enrichir le vocabulaire lié aux probabilités ;
- mettre en évidence le fait que la « somme de deux dés équilibrés »¹ ne suit pas une loi uniforme discrète ;
- calculer la probabilité d'un événement comme somme des probabilités des issues qui le constituent.

¹ On considère en toute rigueur la variable aléatoire qui, au lancer de deux dés équilibrés, associe la somme des faces supérieures obtenues. Mais il ne s'agit pas ici d'introduire ce vocabulaire avec les élèves.

PROLONGEMENTS POSSIBLES

Voici quelques liens qui peuvent permettre de mieux appréhender les systèmes d'attente et de comprendre le modèle défini dans l'activité :

- http://forge.mmodd.org/attachments/611/TER-2013_Auger_Thirard.pdf ;
- http://www.xavierdupre.fr/html/programmation/langage_py_thon/python_cours_exemple.pdf.

Documents en ligne : File_attente_courbe.xws, File_attente_longueur.xws.

Découvrir une autre loi continue : la loi bêta

LA PRÉVALENCE DE LA BACTÉRIE *ESCHERICHIA COLI*

Niveaux : terminales S, ES, STI2D, STL

Prérequis :

- lois à densité sur un intervalle ;
- primitive et intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle ;
- notion d'espérance d'une variable aléatoire à densité.

Objectif :

- découvrir d'autres lois continues (lois à densité à partir d'exemples).

Compétences mises en œuvre :

- extraction et traitement de l'information utile ;
- réalisation d'un calcul automatisable à la main.

En classe de terminale, les exercices sur les lois continues traitent généralement de la loi uniforme, de la loi normale ou de la loi exponentielle. Cette activité a pour objectif de découvrir une autre loi continue : la loi bêta. Celle-ci est couramment utilisée dans le domaine de l'analyse du risque (sismologie, épidémiologie...). À titre d'exemple, dans les années 2000, l'incertitude de la fréquence de contamination de la bactérie *Listeria* dans des rillettes pur porc mises sur le marché français a été modalisée par une telle loi. Cette dernière dépend de deux paramètres α et β (nombres réels strictement positifs) qui sont dans cette activité respectivement 2 et 5. La situation étudiée dans cet exercice est bien fictive, la prévalence peut s'avérer extrêmement élevée. Cela résulte du fait que les paramètres sont choisis de telle sorte que les calculs puissent être effectués « à la main ».

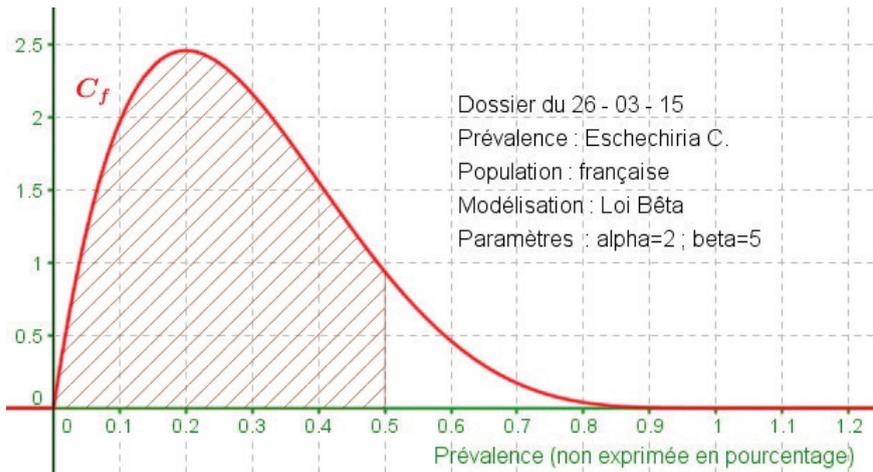
DÉROULEMENT

Ce court exercice est réalisé en classe entière. L'utilisation d'un logiciel de calcul formel et d'un vidéoprojecteur est à prévoir afin de contrôler les résultats.

ACTIVITÉ

Au journal télévisé du 29 mars 2015 sur une chaîne publique, le présentateur annonce que, malgré tous les contrôles sanitaires et les précautions recommandées, des lots de viande hachée pur bœuf seraient

contaminés par la bactérie *Escherichia coli*. La consommation d'un lot contaminé peut provoquer des gastro-entérites sévères, des infections urinaires, voire des méningites. Des études sont actuellement menées par des experts pour modéliser la prévalence de cette bactérie, la prévalence étant la proportion du nombre de personnes contaminées dans la population. Un journaliste s'est procuré le document officiel suivant.



Fonction

$$f(x) = \begin{cases} 30x(1-x)^4 & : 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & : x > 1 \\ 0 & : \text{sinon} \end{cases}$$

1. La prévalence de cette bactérie est modélisée par une loi bêta. Vérifier que la fonction f est bien une densité.
2. Calculer la valeur exacte de l'aire hachurée, puis en donner une valeur approchée au centième. Que peut-on en déduire en termes de prévalence ?

COMMENTAIRES DE SÉANCE

Préalablement à la résolution de cet exercice, il serait judicieux de demander aux élèves le développement de l'expression $x \times (1-x)^4$. Le calcul d'intégrale ne serait ainsi pas un frein à la vérification d'une des trois conditions requises par une densité à la première question et à la détermination de la probabilité à la deuxième question. À ce propos, il conviendrait de s'attarder sur l'interprétation de cette probabilité avec les élèves. En effet, on aurait tendance à dire dans un premier temps que : « la probabilité que moins de 50 % de la population soit atteinte par la bactérie est environ de 0,89 ». Mais l'interprétation suivante est également plausible : « la probabilité que la bactérie atteigne jusque 50 % de la population est environ de 0,89 ». Les deux interprétations n'ont pas la même portée...

PROLONGEMENTS

On peut prolonger cet exercice par le calcul exact de l'espérance et son interprétation. Dans le cadre général, l'espérance est donnée par : $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$.

On peut également proposer des exercices courts sur d'autres thèmes afin de découvrir d'autres lois continues et de réinvestir des propriétés liées aux probabilités et à l'intégration. Citons, par exemple, l'incertitude financière, domaine dans lequel la loi dite « double exponentielle », première loi de Laplace (1774), modélise la distribution des fréquences observées des rendements.

Document en ligne : Bacterie.ggb.