Nicole **Bonnet**

La proportionnalité

sans problème

200 problèmes corrigés

sceren
CNDP-CRDP

Mathématiques cycle 3

Sommaire

Introduction

De manière très succincte, les programmes 2008 indiquent qu'au cycle 3, il s'agit de « *Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unité, en utilisant des procédures variées (dont la « règle de trois)».*

Ainsi la « règle de trois » réapparaît après une longue absence à l'école primaire. Les enseignants doivent donc se réapproprier cette procédure dont les fondements et les acceptions ont largement varié au cours du temps.

Plus généralement, ce retour invite à une réflexion sur l'enseignement de la proportionnalité dont les éléments constitutifs ont évolué. Malgré la réapparition des problèmes dits « de la vie courante » dans les programmes, les types et formes d'énoncés se sont adaptés aux besoins des futurs citoyens. Exit les problèmes de robinets qui fuient, ils laissent la place à des énoncés sémantiquement plus riches, à la lecture de tableaux, à la création et compréhension de graphiques… Le niveau d'exigence a également changé. La tâche des enseignants s'est complexifiée : il ne suffit plus d'apprendre aux élèves à résoudre une seule catégorie de problèmes de proportionnalité avec une méthode standard telle que la règle de trois. À la fin de la scolarité obligatoire, les élèves doivent pouvoir résoudre des problèmes variés, de manière plus pertinente, plus rapide, plus efficace. Ils doivent approcher le paradigme de la proportionnalité. Comment atteindre ces objectifs ?

L'ambition de cet ouvrage est de permettre au lecteur d'appréhender la modélisation implicitement contenue dans l'énoncé du problème, de clarifier les procédures de résolution et de s'approprier la puissance du concept. Des propositions de mise en œuvre sont aussi apparues comme essentielles.

Cet ouvrage propose d'abord une mise au point théorique et didactique puis il présente 200 problèmes corrigés relevant ou non de la proportionnalité et conçus à partir des assertions suivantes.

La première idée est qu'un tel concept ne peut se concevoir sans être mis en relation avec les concepts de grandeurs et mesures, de structure multiplicative, de nombres, de fonction linéaire. La seconde idée est qu'un tel concept se rencontre dans au moins trois registres différents : numérique, graphique, géométrique. C'est l'interaction entre ces différents registres qui permet aux connaissances de se construire. La troisième idée est que l'obstacle le plus coriace se situe entre la reconnaissance du modèle mathématique et son traitement. Après lecture des énoncés, examen des données numériques et identification d'une situation liée à la proportionnalité, deux étapes sont privilégiées dans l'ouvrage : la mise en tableaux et l'appui sur un choix raisonné de procédures. Enfin, même si à l'école élémentaire la proportionnalité n'en est qu'à ses prémices, il ne s'agit pas d'éliminer les difficultés, mais de les graduer et de se situer dans un niveau de complexité à la portée cognitive des élèves.

Afin de ne plus laisser les élèves démunis face à ces problèmes réputés ardus, la diversité des énoncés et des procédures proposées leur permettra d'accéder au sens de la proportionnalité et de faire des liens avec les problèmes référents proposés dans le résumé.

Les problèmes de l'ouvrage sont majoritairement quaternaires : les énoncés mettent en jeu trois nombres et il faut en chercher un quatrième. Ils relèvent de situations de division, de proportionnalité simple (ou de non proportionnalité), de conversions, de comparaisons, d'échelles, de pourcentages et de mesures quotients (vitesse moyenne).

La notion d'agrandissement au sens géométrique a volontairement été évacuée ainsi que la proportionnalité multiple.

Les problèmes sont gradués selon quatre niveaux de différenciation figurés par un système d'étoiles. Ils concernent des élèves de CM1/CM2, mais également de début de collège. Ils sont d'abord classés par grandes catégories, puis par procédures de résolution. Les enseignants pourront suivre cette organisation s'ils souhaitent privilégier une approche « automatisée ». Mais, pour éviter que les élèves, alertés par le titre, ne résolvent les problèmes de façon trop mécanique, il convient de mélanger les divers énoncés. Pour cela, ils pourront utiliser avec profit les carnets « élèves ».

Un exemple de progression en cycle 3

	Période 1	Période 2	Période 3	Période 4	Période 5
Calcul cycle 3	Calcul mémorisé : révision des tables : a x b = ? ; a x ? = c ; ? x b = c . Relation (s) entre les nombres inscrits dans un tableau. Calcul réfléchi (aspect additif). Utilisation de calculatrices afin de déterminer les relations « simples » entre les nombres d'un tableau.				
Pbs multiplicatifs ou divisifs Proportionnalité	Problèmes multiplicatifs et problèmes de division quotition et de division partition.	Observer des tableaux de nombres, tableaux de proportionnalité et de non proportionnalité. Situations de proportionnalité et de non proportionnalité. Organisation de données dans un tableau. Cas simples.	Problèmes de proportionnalité recherche de quatrième proportionnelle Premières représentations graphiques : situations de proportionnalité et de non proportionnalité	Problèmes de proportionnalité recherche de quatrième proportionnelle Problèmes de comparaison	Quelques problèmes de partages proportionnels Problèmes de pourcentages, d'échelles, de vitesses.
Procédures		Utiliser des rapports internes entre les nombres pour compléter un tableau. Mise en avant des propriétés de linéarité pour résoudre les problèmes.	Apprendre à construire et à lire un graphique. Propriétés de linéarité et cœfficient de proportionnalité.	Propriétés de linéarité ; utilisation du cœfficient de proportionnalité et réduction à l'unité (règle de trois).	Propriétés de linéarité ; utilisation du cœfficient de proportionnalité et réduction à l'unité (règle de trois).
Problèmes associés		Niveaux de difficulté ✪ et ✪✪ 1-2-3-4-5-20-21-61-62-63-96-97-98-99-100-101-113-114-115-116-117-118	Niveaux de difficulté ✪ et ✪✪ Les précédentes et 6-7-8-9-10-22-23-29-30-31-32-67-68-69-73-74-75-78-80-81-82-105-106-107	Niveaux de difficulté ✪ et ✪✪ Les précédentes et 33-34-35-36-44-45-83-84-89-90-91-128-129-130-131-137-138	Niveaux de difficulté ✪ et ✪✪ Les précédentes et 46-47-48-141-145-146-147-152-155-156-157-158-164-165-166-168-169-170-171-172-173-174-184-185-186-187-188-189-195

CM1

Synthèse des procédures

Élèves d'école primaire

Ce résumé a pour but de donner à l'élève une aide à la résolution de problèmes de proportionnalité. On va pour cela s'intéresser à des problèmes simples, mais particuliers et faire en sorte **qu'il sache les résoudre grâce à la procédure la plus adaptée.** Ces problèmes pourront servir de référence ou de rappel lors du traitement d'autres problèmes.
Cette aide locale à la compréhension du modèle mathématique a des chances d'être efficace si le maître l'utilise également dans un **processus d'institutionnalisation** fréquent.

Pour résoudre un problème de proportionnalité, on peut mettre les données dans un tableau, puis utiliser la procédure qui convient. Il y a quatre procédures numériques possibles et une procédure graphique.

1re procédure numérique

Utilisation de la propriété multiplicative (ou divisive)

Énoncé du problème référent : « 4 compas coûtent 23 €. *Quel est le prix de 12 compas ?* »
On cherche comment on peut passer de 4 à 12. Comme 12 est multiple de 4, on utilise l'opérateur multiplicatif $\boxed{\times 3}$

× 3

nombre de compas	4	12
prix en €	23	**69**

× 3

Parmi les procédures qui permettent de résoudre les problèmes de proportionnalité, les plus utilisées sont celles qui utilisent les propriétés de linéarité. Ces procédures consistent à trouver les relations entre les nombres de même grandeur et à appliquer ces relations pour calculer dans l'autre grandeur.

La propriété de linéarité, aussi nommée **homogénéité** (ou propriété multiplicative), peut se traduire ainsi : « l'image du produit d'un nombre par un cœfficient multiplicatif est égal au produit de l'image de ce nombre par ce cœfficient multiplicatif ».
Soit $f(\alpha \times x) = \alpha \times f(x)$ où α est un scalaire (nombre dépourvu d'unité).
Le rapport qui existe entre un nombre qui représente une grandeur (le nombre de compas) et son correspondant dans la même grandeur (le nombre de compas), permet d'obtenir ce cœfficient multiplicatif qui est ici $\boxed{3}$
Le prix de 12 compas est donc 69 € (23 × 3).

Remarque : afin de différencier cœfficient de proportionnalité et cœfficient multiplicatif, il peut être judicieux d'appeler systématiquement opérateur multiplicatif celui qui permet d'utiliser la propriété de linéarité. La notation « m 3 » peut alors remplacer « × 3 » dans le tableau.

2e procédure numérique

Utilisation de la propriété additive (et multiplicative ou divisive)

Énoncé du problème référent : « 12 stylos à encre coûtent 30 €. *Quel est le prix de 18 stylos à encre ?* »
On sait que 12 stylos + 6 stylos = 18 stylos. On cherche le prix de 6 stylos en divisant le prix de 12 stylos par 2. On trouve que 6 stylos coûtent 15 € ; 18 stylos coûtent 30 € + 15 € = 45 €.

: 2

nombre de stylos	12	**6**	18
prix en €	30	**15**	**45**

+

La première propriété de linéarité, aussi nommée additivité (ou propriété additive), peut se traduire ainsi : « l'image d'une somme est égale à la somme des images ». Soit $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
Dans ce cas, nous voyons que la propriété dite multiplicative est aussi divisive. En effet pour obtenir le prix de 6 stylos, on a divisé par 2.

Perspectives pour le collège

L'étude de la proportionnalité se poursuit sur l'ensemble du collège avec un enrichissement des procédures de résolution, une extension des domaines d'application et la mise en évidence des différents aspects mathématiques sous-jacents.
En sixième, est introduite la fraction–quotient, c'est-à-dire que $\frac{3}{4}$ est considérée comme un nombre, en particulier comme solution de l'équation $3\,x = 4$.
Tout problème de proportionnalité, quels que soient les nombres en jeu, peut alors être résolu soit en utilisant l'aspect multiplicatif de la proportionnalité (la réduction à l'unité faisant partie de cette procédure), soit à l'aide du cœfficient de proportionnalité.

Thème 4

Corrigés

Procédure : cœfficient de proportionnalité

Problème n° 119

×1,5

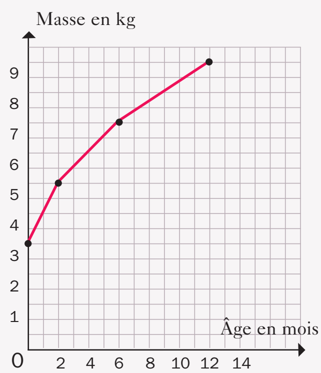
taille du pied en cm	20	22	24	26	28
pointure	30	33	36	39	**42**

Réponse : l'opérateur qui la relie la première ligne à la deuxième est $\boxed{1,5}$ C'est le cœfficient de proportionnalité. Nous sommes dans une situation de proportionnalité.

Un homme dont le pied mesure 28 cm chaussera du 42.

Procédure graphique

Problème n° 120



La représentation graphique n'est pas une droite, et ne passe pas par l'origine du repère.

Réponse : nous ne sommes pas dans une situation de proportionnalité.

Problème n° 121

Si c'était une situation de proportionnalité, elle aurait 96 dents à 32 ans, ce qui est impossible.

Réponse : nous ne sommes pas dans une situation de proportionnalité.

Problème n° 122

Si il y avait proportionnalité, pour 10 sucettes on devrait payer 1 €, or le prix indiqué est 0,50 €.

Réponse : nous ne sommes pas dans une situation de proportionnalité.

Problème n° 123

Si il y avait proportionnalité, la seconde fois il devrait payer 40 €, or il a payé 25 €.

Réponse : nous ne sommes pas dans une situation de proportionnalité.

Problème n° 124

Réponse : dans les mêmes conditions climatiques et d'étendage, le temps de séchage ne varie pas.

Nous ne sommes pas dans une situation de proportionnalité.

Problème n° 125

Réponse : une bougie ou 10 bougies identiques allumées au même moment brûleront durant le même temps.

Nous ne sommes pas dans une situation de proportionnalité.

On peut aussi se reporter pages 124–125 : *Résumé des procédures accessibles à un élève*

Thème 4
Compréhension du monde

4

Problèmes

Problème n° 119 ✪✪✪

En France, la pointure des chaussures peut se lire sur le tableau suivant :

taille du pied en cm	20	22	24	26	28
pointure	30	33	36	39	?

A-t-on une situation de proportionnalité ? quelle sera la pointure d'un homme dont le pied mesure 28 cm ?

Problème n° 120 ✪✪✪

Le tableau suivant montre l'évolution du poids du bébé selon son âge.

âge en mois	0	2	6	12
masse du bébé en kg	3,5	5,5	7,5	9,5

Trace la représentation graphique correspondante. A-t-on une situation de proportionnalité ? Pourquoi ?

Problème n° 121 ✪✪✪

À 8 ans, Karen avait 24 dents.

Combien Karen aura-t-elle de dents à 32 ans ?

Problème n° 122 ✪✪✪

À la boulangerie, il y a des promotions sur les sucettes.

Une sucette à l'unité coûte 0,10 €. Pour 5 sucettes, on paye 0,30 € et pour 10 sucettes, on paye 0,50 €.

A-t-on proportionnalité entre le nombre de sucettes achetées et le prix à payer ? Pourquoi ?

Problème n° 123 ✪✪✪

Cédrick a pris deux fois le même taxi. La première fois, le trajet était de 5 km et il a payé 8 €. La seconde fois, le trajet était de 25 km et il a payé 25 €.

Le prix de la course est-il proportionnel à la longueur du trajet ? Pourquoi ?

Problème n° 124 ✪✪✪✪

Pour faire sécher 6 serviettes de table sur une corde à linge, il faut 24 minutes.

Dans les mêmes conditions climatiques et d'étendage, combien faut-il de temps pour faire sécher 24 serviettes ?

Problème n° 125 ✪✪✪✪

Une bougie d'anniversaire a fini de brûler au bout de 15 minutes.

En combien de temps auront brûlé les 10 bougies de mon gâteau d'anniversaire si on les allume en même temps?

✪ Niveau de difficulté : légende page 29

Thème 9

Corrigés

Procédure : propriété multiplicative de linéarité

Problème n° 194

400 = (25 × 4) × 4

durée de nage en min	5	20	**80**
distance en cm	25	100	400

×4 ×4

1 h = 60 min

80 min = 60 min + 20 min = 1 h 20 min

Réponse :

l'hippocampe mettra donc 80 min soit 1h 20 min pour faire le tour de l'aquarium.

Procédure : propriété multiplicative et additive

Problème n° 195

Il est utile de savoir qu'une demi-heure s'écrit aussi 0,5 h.

Calculer la distance parcourue en 3 h et la distance parcourue en 0,5 h.

Puis, sachant que 3 h 30 min = 3 h + 0,5 h, ajouter les valeurs correspondantes (distances).

: 2 ×3

durée en h	1	3	0,5	3,5
distance en km	4	**12**	**2**	**14**

\+

Réponse : en 3 h et 30 min, le randonneur parcourt 14 km.

Problème n° 196

Il faut savoir que 1 min = 60 s et que 1 min 30 s = 90 s.

× 60 : 2

durée en s	1	60	30	90
distance en km	300000	**18000000**	**9000000**	**27 000 000**

\+

Réponse : la lumière parcourt 27 000 000 km en 1 min 30 s.

Procédure : utilisation du cœfficient de proportionnalité

Problème n° 197

1 h 20 min = 80 min.

Le cœfficient de proportionnalité est $\boxed{\frac{1}{2}}$

×0,5 × 2

distance en km	160	**120**
durée en min	80	60

Réponse : la vitesse moyenne d'Emilie est 120 km/h.

Problème n° 198

×16 : 16

durée en s	1	**24 000**
distance en km	16	384 000

Il faut ensuite convertir 24 000 secondes en minutes puis en heures.

24 000 = (400 × 60) ; 400 = (6 × 60) + 40.

Réponse : pour aller de la terre à la lune, la fusée mettra 6 heures et 40 minutes.

Procédure : règle de trois

Problème n° 199

Retour à l'unité : s'il a roulé 222 km en 3 h, il a roulé $\frac{222}{3}$ = 74 km en 1 h. On multiplie ensuite ce résultat par 5.

: 3 ×5

durée en h	3	1	5
distance en km	222	**74**	**370**

Réponse : l'automobiliste aura parcouru 370 km en 5 heures.

Problème n° 200

2 h 20 min = 140 min

: 60 ×140

durée en min	60	1	140
distance en km	24	**0,4**	**56**

Réponse : en 2 h 20 min, l'hirondelle parcourt 56 km.

On peut aussi se reporter pages 124–125 : *Résumé des procédures accessibles à un élève*

Thème 9

Problèmes de vitesse

Problème n° 194 ✪✪✪✪

Un hippocampe met 5 min pour faire 25 cm. C'est un animal très lent. Le périmètre de l'aquarium mesure 4 m.
Combien de temps mettra-t-il pour en faire le tour ? (réponse en h et min)

Problème n° 195 ✪

Un randonneur marche à une vitesse moyenne de 4 km/h.
Quelle distance parcourt-il en 3 h 30 min ?

Problème n° 196 ✪✪✪

La lumière se propage à la vitesse de 300 000 km/s.
Quelle distance parcourt-elle en 1 min 30 s ?

Problème n° 197 ✪✪✪✪

Avec sa voiture, Émilie a parcouru 160 km en 1 h 20.
Quelle est sa vitesse moyenne ?

Problème n° 198 ✪✪✪✪

Une fois lancée, la fusée parcourt 16 km par seconde.
La distance terre–lune est d'environ 384 000 km.
Combien de temps mettra la fusée pour aller de la terre à la lune (en heures et minutes) ?

Problème n° 199 ✪✪✪✪

Un automobiliste a parcouru 222 km en 3 heures.
S'il continue à la même vitesse, sans s'arrêter, combien de kilomètres fera-t-il en 5 heures ?

Problème n° 200 ✪✪✪✪

Une hirondelle vole 24 km par heure.
Quelle distance parcourt-elle en 2 h 20 min ?

En guise de conclusion

La proportionnalité est une notion indispensable dans la vie quotidienne et pour l'exercice même de la citoyenneté. C'est une notion difficile dont l'apprentissage commence à l'école primaire et dont la maîtrise se renforce tout au long de la vie, rappelle l'inspectrice générale de l'éducation nationale, Marie Mégard. À condition évidemment de l'avoir bien abordée et consolidée tout au long de la scolarité.

En début de cycle 3, le choix des contextes et des valeurs numériques incitent les élèves à mettre en œuvre ce que l'on appelle «le raisonnement proportionnel», c'est-à-dire à utiliser, sans nécessairement les expliciter, les propriétés de linéarité et lorsqu'il a du sens, le cœfficient de proportionnalité. La tâche complexe de l'enseignant est d'inciter les élèves à résoudre les problèmes en utilisant des procédures personnelles qui fonctionnent, des dessins ou des schémas, mais aussi de leur faire découvrir des procédures nouvelles dont l'accès est obligatoirement soumis à un apprentissage. Ensuite, le choix des variables didactiques permet à l'enseignant de mettre l'accent sur les relations entre les nombres et les différentes procédures qui en découlent. A des fins de généralisation, il peut aussi présenter les énoncés dans différents registres : numérique, géométrique et fonctionnel.

La maîtrise de la proportionnalité est loin d'être acquise à la fin de l'école primaire et certaines situations susciteront encore des difficultés en fin de collège. Mais cette approche doit commencer tôt afin que la modélisation du concept se forge peu à peu.
Il sera notamment profitable de mettre en évidence la non équivalence entre croissance et proportionnalité, pour se détacher de l'idée superficielle véhiculée par les messages tels que « plus je joue, plus je gagne ».

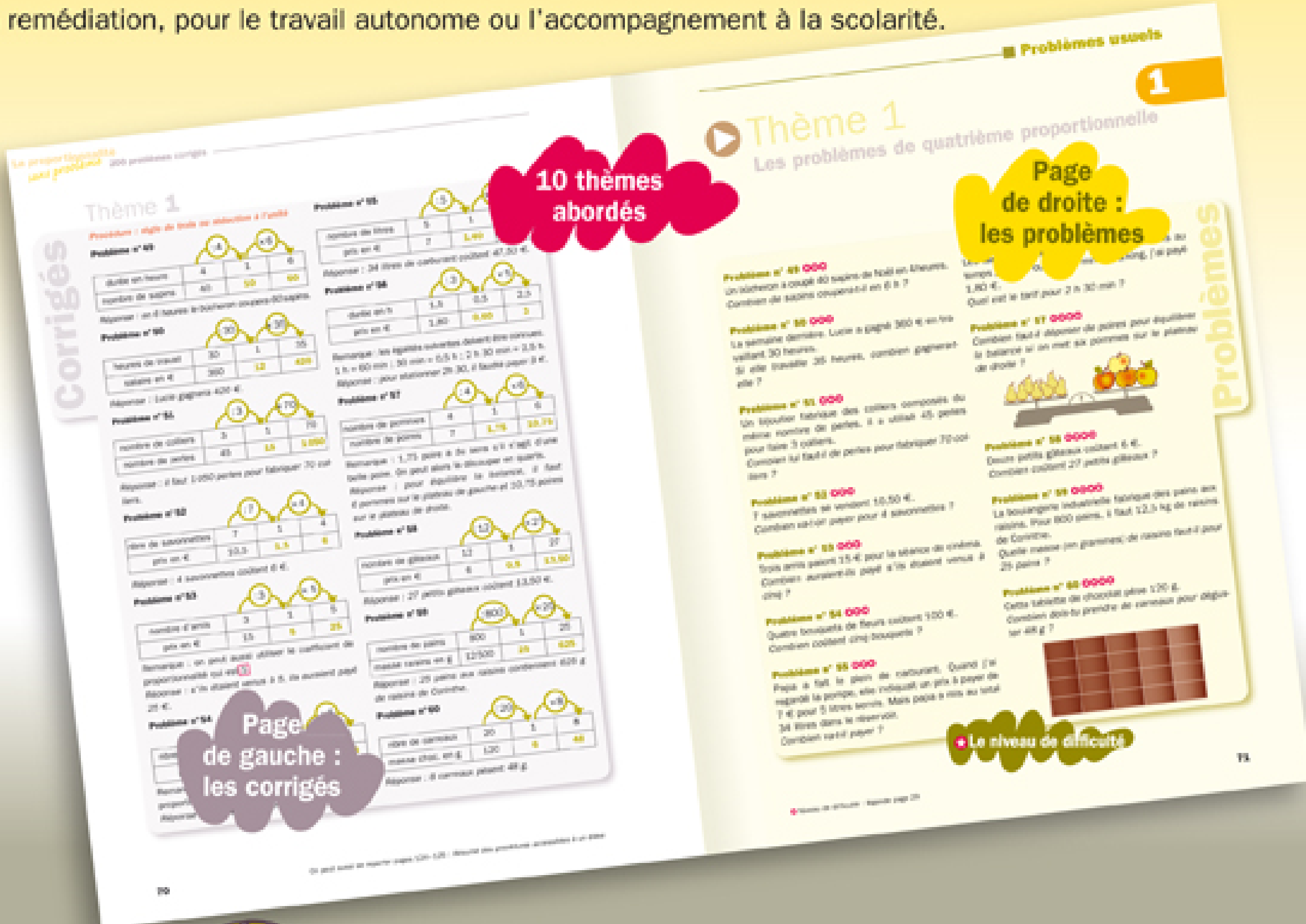
La réussite des élèves dépend de nombreux facteurs souvent imbriqués : possibilité d'employer ou non les propriétés de linéarité, passage par le cœfficient de proportionnalité ou réduction à l'unité (règle de trois) ; nature des grandeurs en jeu dans les problèmes ; domaine numérique dans lequel les mesures prennent leur valeurs (nombre entier naturel, nombre décimal ou nombre rationnel).

Comme tout sport, les mathématiques nécessitent la connaissance de règles et de techniques, mais aussi d'exercices multiples et variés. C'est, enfin, la mise en relation des problèmes traités avec des problèmes référents qui permettra aux élèves d'assimiler le concept très difficile de la proportionnalité.

La proportionnalité *sans problème*

- Une mise au point indispensable pour bien aborder les problèmes de proportionnalité avec les élèves. Des conseils de mise en œuvre rédigés dans l'optique du socle commun et des nouveaux programmes ;

- 200 exercices à utiliser *à la carte* pendant les séances de mathématiques, en remédiation, pour le travail autonome ou l'accompagnement à la scolarité.



Ne multipliez plus les photocopies !

Équipez votre classe avec le carnet d'énoncés

Format A5, 40 pages - Vendu par lot

10 carnets - Réf. : 250B0244 Prix 10 €

25 carnets - Réf. : 250B0245 Prix 20 €

Disponible sur : www.sceren.com

Réf. : 250B0236

Prix : 18 €

9 782840 932086